数理解析研究所講究録
228 巻 1975 年 83-87

バナッハ環のテンソル積の表現について

東北大 教養　岡安隆照

C^* 環 A, B の代数的なテンソル積 $A \odot B$ の, Hilbert空間の上の有界な作用素の環としての表現 π は常に

$$\|\pi(x \otimes y)\| \leqq \|x\| \, \|y\| \;, \quad x \in A, \; y \in B$$

を, 従って又,

$$\|\pi(t)\| \leqq \|t\|_\gamma \;, \quad t \in A \odot B$$

を満足するのであるが[5], この事実はかなり基本的であるにも拘らず, あまり知られていないようにみえるので, この機会に紹介してみたい.

一般に, involutive な環 A の上のノルム $\| \ \|$ で, A をノルム環にするだけでなく, C^* 条件

$$\|x^* x\| = \|x\|^2 \;, \quad x \in A$$

を満たすものを C^* ノルムと呼ぶ. 先づ, この種のノルムを自然に拡張する方法について考える.

<u>補題1.</u> <u>involutiveな環 A の, involution で閉じた ideal I の上に C^* ノルム $\| \ \|$ が与えられたとする.</u> <u>もしも各 $x \in A$</u>

に対し

$$\|x\|^\wedge = \sup\{\|xy\| ; y \in I \text{ 且 } \|y\| \leqq 1\} < \infty$$

が成り立っていれば，これによって定義された$\|\ \|^\wedge$はAの上の準ノルムであって，I上ではもとの$\|\ \|$と一致し，関係式

$$\|xy\|^\wedge \leqq \|x\|^\wedge \|y\|^\wedge, \quad \|x^*x\|^\wedge = \|x\|^\wedge, \quad x, y \in A$$

を満たす．更に$\|\ \|^\wedge$がノルムであるための必要十分条件はIの左annihilator $L_A(I)$が0のみから成ることである．

さて involutive な Banach 環 A, B が共に単位元をもっていれば，$A \odot B$の上のC^*ノルムを$\|\ \|$とするとき，

$$\|x \otimes y\| = \|(x \otimes 1)(1 \otimes y)\| \leqq \|x \otimes 1\| \|1 \otimes y\| \leqq \|x\| \|y\|$$

であるから，

$$(*) \qquad \|x \otimes y\| \leqq \|x\| \|y\|, \quad x \in A, \ y \in B$$

が成り立つが，これは単位元をもつとは限らない，しかし近似的な単位元はもっている環についても示す．そのために補題1が利用される．

補題2. 近似的な単位元をもつ involutive な Banach 環 A, B の代数的なテンソル積 $A \odot B$ の上の C^* ノルムは subcross である，即ち (*) を満足する．

これを示すには$A \odot B$の上に与えられたC^*ノルム$\|\ \|$を補題1の方法で$A_1 \odot B_1$の上まで拡張すればよい．ここにA_1は，もしもAが単位元をもっていればそれ自身を，もしも単

位元をもっていなければ形式的に単位元を添加したものを表わし; B_1 も同様である. $L_{A_1 \odot B_1}(A \odot B) = \{0\}$ と

$$\sup\{\|uv\| : v \in A \odot B \text{ 且 } \|v\| \leqq 1\} < \infty, \quad u \in A \odot B$$

が重要であることはいうまでもない.

補題2の最初の応用は次の定理である.

定理1. C^* 環 A, B の代数的なテンソル積 $A \odot B$ の上の C^* ノルムはクロスノルムである:

$$\|x \otimes y\| = \|x\| \|y\|, \quad x \in A, \ y \in B;$$

従ってそれは射影的ノルム $\| \ \|_\gamma$ より小さい:

$$\|t\| \leqq \|t\|_\gamma, \quad t \in A \odot B.$$

これは最小の C^* ノルム $\| \ \|_\alpha$ がクロスノルムであることからわかる.

補題2の第2の応用が我々の目的の定理である.

定理2. 近似的な単位元をもつ involutive な Banach 環 A, B が共に少なくとも1つの忠実な表現をもつとき, π を $A \odot B$ の表現とすれば次の (i) – (iii) が成り立つ:

(i) $$\|\pi(x \otimes y)\| \leqq \|x\| \|y\|, \quad x \in A, \ y \in B;$$

(ii) $$\|\pi(t)\| \leqq \|t\|_\gamma, \quad t \in A \odot B;$$

(iii) π の表現空間の上への, A, B の表現 π^1, π^2 があって,

$$\pi(x \otimes y) = \pi^1(x) \pi^2(y) = \pi^2(y) \pi^1(x), \quad x \in A, \ y \in B.$$

ここに，Hilbert 空間の上の有界な作用素の環としての表現を単に表現ということにする．(i)については，A, B の忠実な表現を ρ, σ とするとき $\|\pi \oplus (\rho \otimes \sigma)(\ )\|$ が $A \odot B$ の C^* ノルムを与えることに注意すればよい．(iii)は本質的に Guichardet [1] に負う．

定理2からは，$A \odot B$ の上の最大の C^* ノルムは

$$\|t\|_\nu = \sup\{\|\pi(t)\| : \pi \text{ は } A \odot B \text{ の表現}\},\quad t \in A \odot B$$

によって定義される $\|\ \|_\nu$ であることがわかる．このノルムは次の定理 [2], [3], [4] に述べる意味をもっている．

定理3. 近似的単位元をもつ involutive な Banach 環 A, B の代数的テンソル積 $A \odot B$ の上の積と involution に compatible なクロスノルム $\|\ \|_\rho$ は，$A \odot B$ を A の包絡 C^* 環 $C^*(A)$ と B の包絡 C^* 環 $C^*(B)$ の ν テンソル積 $C^*(A) \otimes_\nu C^*(B)$ に埋め込む同型写像を Φ とするとき

$$\|\Phi(t)\|_\nu \leqq \|t\|_\rho,\quad t \in A \odot B$$

を満足するとする．このとき A と B の ρ テンソル積 $A \otimes_\rho B$ の包絡 C^* 環 $C^*(A \otimes_\rho B)$ は $C^*(A) \otimes_\nu C^*(B)$ と同型である．

文　献

1. A. Guichardet, Caractères et représentation de produits de C*-algèbres, Ann. Éc. Norm. Sup. 81 (1964), 189-206.

2. ————————, Tensor products of C*-algebras, Doklady Acad. Sci. USSR, 160 (1965), 986-989; Soviet Math. 6 (1965), 210-213.

3. K. B. Laursen, Tensor products of Banach algebras with involution, Trans. Amer. Math. Soc. 136 (1969), 467-487.

4. T. Okayasu, On the tensor product of C*-algebras, Tôhoku Math. Journ. 18 (1966), 325-331.

5. ————————, On representations of tensor products of involutive Banach algebras, Proc. Japan Acad. 46 (1970), 404-408.

— ◇ —